

第 1 問

問題 1

問 1

ア	イ	ウ
$P(B)$	$P(A)$	$P(A \bar{B})$

問 2

(1)	(2)
0.21	0.07

問題 2

(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)
イ	オ	ア	キ	ウ	エ	カ

問題 3

問 1

一般労働者数 (2023 年 11 月)	パートタイム労働者数 (2023 年 11 月)	一般労働者の 寄与度	パートタイム 労働者の寄与度
3418.6 万人	1658.6 万人	2.2 %	-1.3 %

問 2

0.5 %

問 3

ア	イ	ウ
(a)	(b)	(b)

問 4

(実質賃金の前年同月比の正負(プラスマイナス)をどのように読み取るのか。)

実質賃金の前年同月比 (%) は、おおまかに、実質賃金増加率=名目賃金増加率-消費者物価指数増加率 (CPI)、で判定できる。そして

- ・ 名目賃金の伸び率 > CPI の伸び率 → 実質賃金は プラス
- ・ 名目賃金の伸び率 < CPI の伸び率 → 実質賃金は マイナス

となる。よって名目賃金と CPI の前年同月比を比較すれば、名目が CPI を上回るか下回るかで、実質賃金の正負を読み取れる。

(一般労働者とパートタイム労働者の実質賃金の推移)

データより以下のことがいえる。

- ・ 2023 年 6 月～2023 年 9 月には、一般労働者・パートタイム労働者の実質賃金は、ともに負で推移
- ・ パートタイム労働者の実質賃金は、2023 年 10 月～2014 年 10 月は、正で推移している。
- ・ 一般労働者の実質賃金は、2023 年 10 月～2024 年 5 月は、負で推移。そして 2024 年 6 月～2024 年 10 月は、ほぼ正で推移している(2024 年 8 月を除く)

第 2 問

問題 1

ア	イ
$\bar{x} - \frac{Z_{\alpha/2} \sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{x} + \frac{Z_{\alpha/2} \sigma}{\sqrt{n}}$

ウ	エ	オ
$Z_{\alpha/2}$	$z(x, \mu_0)$	α

問題 2

問 1

ここで求めている信頼区間はモデルの母数に関する不確実性を示しており、要は誤差項が存在しない場合の区間推定を行っている。これに対し、予測区間は誤差項を考慮した上で、個々の観測値が取りうる範囲を示している。もし予測区間をみれば、信頼区間を外れたデータ数はもっと少なくなるはずである。

問 2

男性のデータのほうがばらつきが大きく見えるのは、男性データのほうが平均値が大きく、その結果、誤差項分散が大きくなっているからである。そのため、実際にデータのばらつき度合いを検証する際は、分散を平均値で割った、変動係数などで比較をおこなう。

問 3

(女性の回帰直線)

$$y_1 = 360.746 + 15.178 (x - 2024)$$

(男性の回帰直線)

$$y_1 = 1191.403 + 30.598 (x - 2024)$$

問 4

x 年における女性合格者の数を y_F 、男性合格者の数を y_M とすると、女性合格者の比率が 30% となる年は、 $y_F / (y_F + y_M) = 0.3$ の条件を満たす x を求めればよい。これを解くと、 $x = 2096.584$ となるので、2097 年となる。

問題 3

問 1

0.523

問 2

(下限)

-0.230

(上限)

1.420

問 3

帰無仮説 $H_0: \beta_1 = 0$ vs 対立仮説 $H_1: \beta_1 \neq 0$ の仮説検定をおこなえばよい。 β_1 の最小二乗法推定量を $\widehat{\beta}_1$ とすると、その標準誤差 $SE(\widehat{\beta}_1)$ は 0.3384 より、検定統計量 t は

$$t = \frac{\widehat{\beta}_1}{SE(\widehat{\beta}_1)} = \frac{0.9124}{0.3384} \approx 2.6962.$$

となる。自由度は 21 となることから、臨界値は $t_{0.975, 21} \approx 2.0796$ となる。

$t=2.6962 > 2.0796$ より帰無仮説を棄却する。よって β_1 は有意に 0 ではない。

問 4

帰無仮説 $H_0: \beta_1 + \beta_2 = 1$ vs 対立仮説 $H_1: \beta_1 + \beta_2 \neq 1$ の仮説検定を行えばよい。制約なしの RSS を RSS_{ur} 、制約有の RSS を RSS_r とすると、 $RSS_{ur} =$

0.0203353、 $RSS_r = 0.0230544$ となる。検定統計量 F は

$$F_{(q, n-p-1)} = \frac{(RSS_r - RSS_{ur})/q}{RSS_{ur}/(n-p-1)} = \frac{0.0230544 - 0.0203353}{0.0203353/21} \approx 2.808$$

となり、制約数 q は $q=1$ 、標本数 n は $n=24$ 、説明変数の数 p は、 $p=2$ である

ことから、自由度は(1,21)で、5% 臨界値 $F_{0.95; (1,21)} \approx 4.32$ である。従って、

有意水準 5%では 帰無仮説を棄却できない。

第1問

問題 1

問 1

これは確率・ベイズに関する基本的な問題である。具体的には、事象 A ：納品された商品に問題が生じる時に、事象 B ：Y 社をどの程度信頼できると判断するか、という問題である。これは条件付確率およびベイズの定理より、

$$P(A \cap B) = P(A | B) \times P(B)$$

$$P(B | A) = \frac{P(A | B) \times P(B)}{P(A)}$$

$$P(A) = P(A | B)P(B) + P(A | \bar{B}) \times P(\bar{B})$$

となる。すなわち標準的な確率の関係より、 $P(A \cap B) = P(A | B)P(B)$ 、および全確率の法則により $P(A) = P(A | B)P(B) + P(A | \bar{B})P(\bar{B})$ となる。ベイズの定理の分母は $P(A)$ であることから、穴埋めは上の通りとなる。

問 2

ベイズの定理を使うことで、

$$\begin{aligned} P(B_1 | A_1) &= \frac{P(A_1 | B_1)P(B_1)}{P(A_1 | B_1)P(B_1) + P(A_1 | \bar{B}_1)P(\bar{B}_1)} \\ &= \frac{0.04 \times 0.5}{0.04 \times 0.5 + 0.15 \times 0.5} = \frac{4}{19} = 0.210526 \dots \\ &\Rightarrow 0.21. \end{aligned}$$

となる。そしてこの結果から、第2期は $P(B_2) = P(B_1 | A_1) = \frac{4}{19}$ となることを用いて、同様に、

$$\begin{aligned} P(B_2 | A_2) &= \frac{0.04 \times \frac{4}{19}}{0.04 \times \frac{4}{19} + 0.15 \times (1 - \frac{4}{19})} \\ &\approx \frac{16}{241} \approx 0.06639 \dots \\ &\Rightarrow 0.07. \end{aligned}$$

となる。この問題の主旨は、観測毎にベイズ更新され、”信頼できる” 確率は商品に問題が観測されるごとに低下していく（与えられた条件では $0.5 \rightarrow 0.21 \rightarrow 0.07$ と低下）ということ、ベイズの定理で表現している点にある。

問題 2

この問題は、図1のヒストグラム(a)~(g)は、7種類の分布から生成した標本(各 $n = 1000$)のヒストグラム、図2のプロット(ア)~(キ)はそれぞれの正規Q-Qプロットであり、各Q-Qプロットがどのヒストグラムに対応するかを決めるというものである。この問題を解くにあたり、次のような判定ルールを当てはめて説くのが良い。すなわちヒストグラムから見て取れる累積確率分布と、正規分布から得られる累積確率分布を比較することで、以下のことがいえる。

判定ルール

正規Q-Qプロットでは、標本分布が正規に従うなら点はほぼ直線上に並ぶ。そしてそこからのズレ方によってヒストグラムの形を推測する。

- プロットがほぼ直線(45度)に並ぶ：標本は正規に近い(ヒストグラムは釣鐘型)。
- 端で上に反る(両端が上に逸脱)：裾が厚い(heavy-tailed)。
- 端で下に反る：裾が薄い(薄い裾, 軽い裾)。
- 右端が持ち上がる → 右裾が長い(正に歪んだ分布、例：指数分布)。
- 中央で上、端で下(S字型) → 分布が尖っている(尖度が大きい、裾が薄い)。
- 二峰性ヒストグラム → Q-Qプロットは直線に沿わず、中央で不自然にずれる。
- 並びが部分的に直線だが一部で外れる：ほぼ正規だが外れ値がある。

そして実際に対応させるときは以下の順で確認します：

1. まず正規分布に近いヒストグラムを探す。Q-Qプロットがきれいに直線に並んでいるものは、ヒストグラムも釣鐘型となる。また正規分布だが外れ値があるものも、この基準をもとに判別する。
2. 歪度をチェック。Q-Qプロットの右端が大きく上に逸れているならば、右裾が長いので、ヒストグラムで右に長い尾を持つ。
3. 裾の厚さを確認し、両端が上に逸れているならば、heavy tail(裾が厚い)。両端が下に逸れているならば、light tail(裾が薄い)。
4. 非対称性(二峰性)を疑う。直線から外れて「段差」や「くの字」っぽくなるならば、二峰性ヒストグラム。

最終的に、次のような結果になる。

- ア(直線に近いQ-Q) → (c)
- イ(直線から外れて「段差」や「くの字」っぽくなる) → (a)
- ウ(直線から外れて「段差」や「くの字」っぽくなる) → (e)
- エ(右端が大きく持ち上がる) → (f)
- オ(直線から外れて「段差」や「くの字」っぽくなる) → (b)
- カ(直線に近いQ-Qが一部外れる) → (g)
- キ(直線に近いが一部外れる) → (d)

問題 3

問 1

一般労働者の人数を G 、パートタイム労働者の数を P とすると、一般労働者の前年同月の人数は、

$$G_{t-12} = \frac{G_t}{1 + 0.032}, \quad P_{t-12} = \frac{P_t}{1 - 0.039}.$$

という計算をして求めればよい。また寄与度は「人数の増減が全体の前年同月比に与える絶対的影響（百分率ポイント）」を計算する方法で求める。よって

$$G_{t-12} \approx \frac{3528.0}{1.032} \approx 3418.605 \text{ 万人},$$
$$P_{t-12} \approx \frac{1593.9}{0.961} \approx 1658.585 \text{ 万人}.$$

として計算すればよい。また状雇用全体の全体の 1 年前値の近似は

$$W_{t-12} = G_{t-12} + P_{t-12} \approx 5077.190 \text{ 万人}.$$

となる。また寄与度を計算すると、一般労働者の寄与（百分率ポイント）：

$$\Delta_G = \frac{G_t - G_{t-12}}{W_{t-12}} \times 100 \approx \frac{3528.0 - 3418.605}{5077.190} \times 100 \approx +2.2 \text{ pp}.$$

パートタイム労働者の寄与：

$$\Delta_P = \frac{P_t - P_{t-12}}{W_{t-12}} \times 100 \approx \frac{1593.9 - 1658.585}{5077.190} \times 100 \approx -1.3 \text{ pp}.$$

となる。これらの和は全体の約 +0.9% に整合し、問題の公表値 +0.9% と一致することがわかる。よって結果は以下の通り。

- 2023 年 11 月の一般労働者数：3418.6 万人（小数第 1 位まで）
- 2023 年 11 月のパートタイム労働者数：1658.6 万人
- 一般労働者の寄与度：+2.2 (%)
- パートタイム労働者の寄与度：-1.3 (%)

問 2

実質賃金の前年同月比は名目の増加率と物価の増加率から求める。 t 期およびその前年同月期の名目賃金を w_t 、 w_{t-12} 、 t 期およびその前年同月期の消費者物価指数を p_t 、 p_{t-12} とすると、実質賃金の前年同月比は、

$$\frac{w_t/p_t - w_{t-12}/p_{t-12}}{w_{t-12}/p_{t-12}} = \frac{w_t/p_t}{w_{t-12}/p_{t-12}} - 1 = \frac{w_t/w_{t-12}}{p_t/p_{t-12}} - 1$$

となる。よって実質賃金の前年同月比を求めるには、

$$\text{実質増率} = \frac{1 + \text{名目増率}}{1 + \text{CPI 増率}} - 1.$$

として計算すればよい。常用（名目）増率 = +3.9%, CPI 増率 = +3.4% となることから、

$$\frac{1.039}{1.034} - 1 \approx 0.0048356 \approx 0.48\% \rightarrow \boxed{0.5\%}.$$

とすればよい。

問 3

さきほどの解説から、実質賃金の前年同月比は、

$$\frac{w_t/w_{t-12}}{p_t/p_{t-12}} - 1 = \frac{w_t/w_{t-12} - p_t/p_{t-12}}{p_t/p_{t-12}}$$

となる。分母を計算すると、

$$w_t/w_{t-12} - p_t/p_{t-12} = \frac{w_t - w_{t-12}}{w_{t-12}} + 1 - \frac{p_t - p_{t-12}}{p_{t-12}} - 1 = \frac{w_t - w_{t-12}}{w_{t-12}} - \frac{p_t - p_{t-12}}{p_{t-12}}$$

となる。これは一般労働者の名目賃金の前年同月比から、消費者物価指数の前年同月比を引いたものを意味する。また分母は

$$\frac{p_t}{p_{t-12}} = 1 + \frac{p_t - p_{t-12}}{p_{t-12}}$$

となる。そして分子に 100 をかける事で一般労働者の実質賃金の前年同月比が%で表現される。よって、一般労働者の実質賃金の前年同月比（%）は、

ア = (a) 一般労働者の名目賃金の前年同月比（%），

イ = (b) 消費者物価指数の前年同月比（%）

ウ = (c) 消費者物価指数の前年同月比（%）

で計算すればよいことが分かる。

問 4

まず実質賃金の正負の読み取り方について試みる。実質賃金の前年同月比（%）は、おおまかに、実質賃金増加率 = 名目賃金増加率 - 消費者物価指数増加率（CPI）、で判定できる。そして

- 名目賃金の伸び率 > CPI の伸び率 → 実質賃金は プラス
- 名目賃金の伸び率 < CPI の伸び率 → 実質賃金は マイナス

となる。よって名目賃金と CPI の前年同月比を比較すれば、名目が CPI を上回るか下回るかで、実質賃金の正負を読み取れる。これをもとに一般労働者・パートタイム労働者の実質賃金推移を見てみると、以下のことがいえる。

- 2023 年 6 月～2023 年 9 月には、一般労働者・パートタイム労働者の実質賃金は、ともに負で推移している。
- パートタイム労働者の実質賃金は、2023 年 10 月～2014 年 10 月は、正で推移している。
- 一般労働者の実質賃金は、2023 年 10 月～2024 年 5 月は、負で推移している。そして 2024 年 6 月～2024 年 10 月は、ほぼ正で推移している（2024 年 8 月を除く）

問題 2

問 1

母分散 σ^2 が既知の正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ の母平均 μ に関する信頼区間と仮説検定の同値性を示す問題である。すなわち、以下のような定義をし、

$$z(x, \mu_0) = \frac{x - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}, \quad s(x, \mu_0) = P(|Z| \geq |z(x, \mu_0)|),$$

$Z \sim N(0, 1)$ 、その両側 $100(1 - \alpha)\%$ 信頼区間の端点を $\boxed{\text{ア}}$ 、 $\boxed{\text{イ}}$ で表し、以下の同値性を示すための穴埋めを行うものである。

信頼区間が μ_0 を含まないとは

$$\mu_0 \leq x - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{または} \quad x + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu_0.$$

これは代数変形により

$$\left| \frac{x - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \right| \geq z_{\alpha/2}$$

と同値であり、これは検定での棄却域（両側）と一致する。さらに、これを P 表現に直すと

$$P(|Z| \geq |z(x, \mu_0)|) \leq P(|Z| \geq z_{\alpha/2}) = \alpha,$$

すなわち $s(x, \mu_0) \leq \alpha$ 。よって三条件は同値である。よって、解答は以下の通りとなる。

$$\boxed{\text{ア}} : x - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

$$\boxed{\text{イ}} : x + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

$$\boxed{\text{ウ}} : z_{\alpha/2},$$

$$\boxed{\text{エ}} : z(x, \mu_0),$$

$$\boxed{\text{オ}} : \alpha.$$

問題 2

問 1

ここで求めている信頼区間はモデルの母数に関する不確実性を示しており、要は誤差項が存在しない場合の区間推定を行っている。これに対し、予測区間は誤差項を考慮した上で、個々の観測値が取りうる範囲を示している。もし予測区間をみれば、信頼区間を外れたデータ数はもっと少なくなるはずである。

問 2

男性のデータのほうがばらつきが大きく見えるのは、男性データのほうが平均値が大きく、その結果、誤差項分散が大きくなっているからである。そのため、実際にデータのばらつき度合いを検証する際は、分散を平均値で割った、変動係数などで比較をおこなう。

問 3

年 x (西暦) と女性合格者数 y_F の単回帰は

$$\hat{y}_F(x) = -30,359.526 + 15.178x$$

である。基準年 $x_0 = 2024$ に中心化した表現すると、

$$y_F = \underbrace{(\alpha_F + \beta_F x_0)}_{a_F} + \underbrace{\beta_F}_{b_F} (x - x_0) \Rightarrow \hat{y}_F(x) = \hat{a}_F + \hat{b}_F (x - 2024)$$

となる。これを実際に計算をすると、

$$\hat{a}_F = \hat{\alpha}_F + \hat{\beta}_F \times 2024 = -30,359.526 + 15.178 \times 2024 = 360.746, \quad \hat{b}_F = \hat{\beta}_F = 15.178.$$

よって

$$\hat{y}_F(x) = 360.746 + 15.178(x - 2024)$$

となる。同様にして男性の方も計算すると、

$$\hat{y}_M(x) = 1191.403 + 30.598(x - 2024)$$

問 4

女性合格者の比率が 30% となる年 x は

$$\frac{\hat{y}_F(x)}{\hat{y}_F(x) + \hat{y}_M(x)} = 0.3$$

を満たす x を解けばよい ($\hat{y}_M$ は男性の回帰式)。数値代入により $x \approx 2096.584$ となるので、2097 年 となる。

問題 3

問 1

自由度調整済み決定係数の公式は以下の通り。

$$\text{Adjusted } R^2 = 1 - (1 - R^2) \frac{n-1}{n-p-1},$$

ここで $n = 24$ (2000–2023 の 24 観測), 説明変数の数 $p = 2$ を代入すると、

$$\text{Adjusted } R^2 \approx 1 - (1 - 0.5644) \frac{23}{21} \approx 0.5229143 \dots \rightarrow \boxed{0.523}.$$

問 2

β_2 の推定値 $\hat{\beta}_2$ の信頼区間は以下のようにして求められる。

$$\hat{\beta}_2 \pm t_{0.975,21} \text{SE}(\hat{\beta}_2)$$

$\text{SE}(\hat{\beta}_2)$ は、 $\hat{\beta}_2$ の標準誤差である。 $\hat{\beta}_2 = 0.5948$, $\text{SE}(\hat{\beta}_2) = 0.3966$, $t_{0.975,21} \approx 2.0796$ より、

$$0.5948 \pm 2.0796 \times 0.3966 \approx (-0.22997, 1.41957).$$

となる。そして四捨五入した結果は、 $\boxed{(-0.230, 1.420)}$ 。

問 3

帰無仮説 $H_0 : \beta_1 = 0$, 対立 $H_1 : \beta_1 \neq 0$ の仮説検定をおこなえばよい。検定統計量 t は

$$t = \frac{\hat{\beta}_1}{\text{SE}(\hat{\beta}_1)} = \frac{0.9124}{0.3384} \approx 2.6962.$$

$\text{SE}(\hat{\beta}_1)$ は $\hat{\beta}_1$ の標準誤差である。自由度は 21 となるので臨界値 $t_{0.975,21} \approx 2.0796$ となる。 $t = 2.6962 > 2.0796$ より帰無仮説を棄却する。結論: β_1 は有意に 0 ではない (5% 水準)。

問 4

帰無仮説 $H_0 : \beta_1 + \beta_2 = 1$, 対立仮説 $H_1 : \beta_1 + \beta_2 \neq 1$ の仮説検定をおこなえばよい。制約なしの残差平方和 RSS を、 RSS_{ur} とすると、 $\text{RSS}_{ur} = 0.0203353$ となる。同様にして、帰無仮説を満たす制約下の RSS を RSS_r とすると、 $\text{RSS}_r = 0.0230544$ となる。検定統計量 F は

$$F_{(q,n-p-1)} = \frac{(\text{RSS}_r - \text{RSS}_{ur})/q}{\text{RSS}_{ur}/(n-p-1)} = \frac{0.0230544 - 0.0203353}{0.0203353/21} \approx 2.808.$$

となり、制約数は $q = 1$, 標本数は $n = 24$, 説明変数の数 $p = 2$ であることから、自由度は $(1, 21)$ で、5% 臨界値 $F_{0.95;(1,21)} \approx 4.32$ 。従って、有意水準 5% では $\beta_1 + \beta_2 = 1$ を棄却できない。

なおこの検定方法については、『計量経済学 第2版』(2022年、著:山本拓、出版社:新世社)、pp.146-149などを参照。