第 7 問解答（統計学）

問題 1

ア	イ	ウ
$500,000$	$360,000$	30

（解説）容易である．たとえば，$\boxed{\text{ウ}}$ の個数を x とすると，それは次の方程式から求まる：

$$300 \times 60 + 400 \times 60 + 500 \times 40 + 600 \times x = 80000$$

エ
$360,000$

（解説）$\boxed{\text{エ}} = \min\left\{\boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{イ}}\right\}$

オ
$416,000$

（解説）$\boxed{\text{オ}} = 0.4 \times \boxed{\text{ア}} + 0.6 \times \boxed{\text{イ}} + 0.0 \times 80000$

カ	キ	ク	ケ
0.25	0.62	0.31	0.57

（解説）天気が晴れ，曇り，雨であるという事象を，それぞれ，W_1, W_2, W_3 で表し，300 円の弁当が n_1 個，400 円のが n_2 個，500 円のが n_3 個，600 円のが n_4 個売れるという事象を，$\{n_1, n_2, n_3, n_4\}$ と表すことにする．このとき，

$$\Pr\bigl(\{n_1, n_2, n_3, n_4\}|W_1\bigr) = \frac{(n_1 + n_2 + n_3 + n_4)!}{n_1!n_2!n_3!n_4!} 0.1^{n_1} 0.2^{n_2} 0.3^{n_3} 0.4^{n_4}$$
$$\Pr\bigl(\{n_1, n_2, n_3, n_4\}|W_2\bigr) = \frac{(n_1 + n_2 + n_3 + n_4)!}{n_1!n_2!n_3!n_4!} 0.2^{n_1} 0.3^{n_2} 0.3^{n_3} 0.2^{n_4}$$
$$\Pr\bigl(\{n_1, n_2, n_3, n_4\}|W_3\bigr) = \frac{(n_1 + n_2 + n_3 + n_4)!}{n_1!n_2!n_3!n_4!} 0.4^{n_1} 0.3^{n_2} 0.2^{n_3} 0.1^{n_4}$$

である．ベイズの定理より

$$\Pr\bigl(W_1|\{n_1, n_2, n_3, n_4\}\bigr) = \frac{\Pr(W_1)\Pr\bigl(\{n_1, n_2, n_3, n_4\}|W_1\bigr)}{\sum_{i=1}^{3} \Pr(W_i)\Pr\bigl(\{n_1, n_2, n_3, n_4\}|W_i\bigr)}$$

これより，たとえば

$$\boxed{\text{ケ}} = \Pr\bigl(W_1|\{0, 0, 2, 1\}\bigr) = \frac{0.4 \times 3 \cdot 0.3^2 \cdot 0.4}{0.4 \times 3 \cdot 0.3^2 \cdot 0.4 + 0.6 \times 3 \cdot 0.3^2 \cdot 0.2} = 0.571 \cdots$$

第 7 問解答（統計学）

問題 2

階級	階級値	度数	累積度数	相対度数	累積相対度数	所得比率
250 万円未満	150	$\boxed{400}$	$\boxed{400}$	$\boxed{ア}$	$\boxed{0.10}$	$\boxed{カ}$
250 万円以上〜500 万円未満	420	1200	1600	$\boxed{イ}$	0.40	$\boxed{キ}$
500 万円以上〜750 万円未満	630	1600	$\boxed{3200}$	$\boxed{ウ}$	$\boxed{0.80}$	$\boxed{ク}$
750 万円以上〜1000 万円未満	880	$\boxed{600}$	3800	$\boxed{エ}$	$\boxed{0.95}$	$\boxed{ケ}$
1000 万円以上	1500	$\boxed{200}$	$\boxed{4000}$	$\boxed{オ}$	1	$\boxed{コ}$

（解説）標本の大きさは，階級値 420 の累積度数が 1600 でその累積相対度数が 0.4 であることから，$1600/0.4 = 4000$ とわかる．

(1)

ア	イ	ウ	エ	オ
0.10	0.30	0.40	0.15	0.05

(2)

カ	キ	ク	ケ	コ
0.025	0.210	0.420	0.220	0.125

（解説）全体の所得合計 $= \sum_{\text{階級}} (\text{階級値}) \times (\text{度数})$

(3) ジニ係数 $= \boxed{0.24}$

（計算の詳細）

ジニ係数は，完全平等線とこの所得データのローレンツ曲線：

$$(0,0),\ (0.10, 0.025),\ (0.40, 0.235),\ (0.80, 0.655),\ (0.95, 0.875),\ (1,1)$$

を順につないだ折れ線とが囲む図形の面積の 2 倍に等しい．ゆえに，

$$\begin{aligned}\text{ジニ係数} = 1 - \{&0.10 \times 0.025 + 0.30 \times (0.025 + 0.235) \\ &+ 0.40 \times (0.235 + 0.655) + 0.15 \times (0.655 + 0.875) \\ &+ 0.05 \times (0.875 + 1)\} = 0.2405\end{aligned}$$

(4)

サ	シ	ス	セ
ヒストグラム	面積	右	算術平均

第 7 問解答（統計学）

$\boxed{\textbf{問題 3}}$

(1) $\mathrm{V}(X) = \boxed{\dfrac{3}{4}}$

（解説）$\mathrm{E}(X) = \dfrac{3}{2}$, $\mathrm{E}(X^2) = 3$．ゆえに，$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \{\mathrm{E}(X)\}^2 = \dfrac{3}{4}$.

(2) $\mathrm{Cov}(Y, Z) = \boxed{-6}$

（解説）$\mathrm{V}(Y) = \mathrm{E}(Y^2) = 2$．ゆえに，$\mathrm{Cov}(Y, Z) = \mathrm{Cov}(\mathrm{Y}, 2\mathrm{X} - 3\mathrm{Y}) = 2\mathrm{Cov}(X, Y) - 3\mathrm{V}(Y) = -3\mathrm{V}(Y) = -6$.

(3) $\mathrm{Cor}(Z, W) = \boxed{0}$

（解説）$\mathrm{Cov}(Z, W) = \mathrm{Cov}(2X - 3Y, 4X + Y) = 8\mathrm{V}(X) - 10\mathrm{Cov}(X, Y) - 3\mathrm{V}(Y) = 8\mathrm{V}(X) - 3\mathrm{V}(Y) = 0$．ゆえに，$\mathrm{Cor}(Z, W) = 0$.

(4) $\mathrm{Pr}(Z = 8 | W = 2) = \boxed{\dfrac{3}{4}}$

（解説）$\mathrm{Pr}(W = 2) = \mathrm{Pr}(X = 1, Y = -2) + \mathrm{Pr}(X = 0, Y = 2) = \dfrac{3}{40} + \dfrac{1}{40} = \dfrac{1}{10}$, $\mathrm{Pr}(Z = 8, W = 2) = \mathrm{Pr}(X = 1, Y = -2) = \dfrac{3}{40}$．ゆえに，$\mathrm{Pr}(Z = 8 | W = 2) = \dfrac{\mathrm{Pr}(Z = 8, W = 2)}{\mathrm{Pr}(W = 2)} = \dfrac{3}{4}$.

第 8 問解答（統計学）

$\boxed{\textbf{問題 1}}$

(1) $\hat{\alpha} = \boxed{\dfrac{\sum_{h=1}^{5} y_h}{5} - \dfrac{5\sum_{h=1}^{5} x_h y_h - \left(\sum_{h=1}^{5} x_h\right)\left(\sum_{h=1}^{5} y_h\right)}{5\sum_{h=1}^{5} {x_h}^2 - \left(\sum_{h=1}^{5} x_h\right)^2} \times \dfrac{\sum_{h=1}^{5} x_h}{5}}$

$\hat{\beta} = \boxed{\dfrac{5\sum_{h=1}^{5} x_h y_h - \left(\sum_{h=1}^{5} x_h\right)\left(\sum_{h=1}^{5} y_h\right)}{5\sum_{h=1}^{5} {x_h}^2 - \left(\sum_{h=1}^{5} x_h\right)^2}}$

(2) $\hat{\alpha} = \boxed{-20.00}$ $\quad\hat{\beta} = \boxed{0.12}$

(3) $\hat{\sigma}^2 = \boxed{53.333}$

（解説）総平方和 $S_T = \sum_{h=1}^{5} (y_h - \bar{y})^2 = 1600$，回帰平方和 $S_R = \hat{\beta}^2 \sum_{h=1}^{5} (x_h - \bar{x})^2 = 1440$．残差平方和 $S_e = R_T - S_R = 160$．ゆえに，$\hat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{5-2} S_e = 53.333\cdots$．

(4) 決定係数 $= \boxed{0.90}$ 　（解説）決定係数 $= \dfrac{S_R}{S_T}$

(5) 予測値 $= \boxed{46}$ 　（解説）$\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} \times 550$

第 8 問解答（統計学）

問題 2

(1)（仮説検定の詳細と検定結果）

検定する帰無仮説 H_0 と対立仮説 H_1 は

$$H_0 : {\sigma_A}^2 = 25 \quad \text{vs.} \quad H_1 : {\sigma_A}^2 < 25$$

帰無仮説 $H_0 : {\sigma_A}^2 = 25$ のもとでは

$$\chi^2 = \frac{(31-1){s_A}^2}{25} \sim \chi^2(30)$$

よって，対立仮説 $H_1 : {\sigma_A}^2 < 25$ に対しては，

$$\chi^2 < \chi^2_{1-0.05}(30) = 18.49$$

のとき，H_0 は有意水準 5% で有意となる．実際

$$\chi^2 = 21.168 \not< 18.49$$

よって，帰無仮説 H_0 は棄却されず，${\sigma_A}^2 < 25$ という主張は受容されない．

(2)（仮説検定の詳細と検定結果）

検定する帰無仮説 H_0 と対立仮説 H_1 は

$$H_0 : {\sigma_A}^2 = {\sigma_B}^2 \quad \text{vs.} \quad H_1 : {\sigma_A}^2 < {\sigma_B}^2$$

帰無仮説 $H_0 : {\sigma_A}^2 = {\sigma_B}^2$ のもとでは

$$F = \frac{{s_B}^2}{{s_A}^2} \sim \mathrm{F}(15, 30)$$

よって，対立仮説 $H_1 : {\sigma_A}^2 < {\sigma_B}^2$ に対しては，

$$F > F_{0.05}(15, 30) = 2.015$$

のとき，H_0 は有意水準 5% で有意となる．実際

$$F = 1.907 \not> 2.015$$

よって，帰無仮説 H_0 は棄却されず，${\sigma_A}^2 < {\sigma_B}^2$ という主張は受容されない．

(3) 信頼区間の下限 = $\boxed{11.264}$　　信頼区間の上限 = $\boxed{31.159}$

〈解説）${\sigma_A}^2$ に関する不等式

$$\chi^2_{1-0.025}(30) \leqq \frac{30{s_A}^2}{{\sigma_A}^2} \leqq \chi^2_{0.025}(30)$$

を解けばよい．

第8問解答（統計学）

問題 3

ア	イ	ウ	エ
μ_i	σ^2	正規	μ_i

オ	カ	キ
$\dfrac{\sigma^2}{n_i}$	μ	$\dfrac{\sigma^2}{n}$

ク	ケ	コ	サ
$n-\ell$	カイ 2 乗	0	$\ell-1$

シ	ス	セ	ソ
S_B	$\ell-1$	S_W	$n-\ell$

タ	チ	ツ
$\ell-1$	$n-\ell$	F