第 7 問解答（統計学）

問題 1　寿命 X の確率密度関数を $f(x)$，$X \geqq 20$ と与えられたときの X の条件つき確率密度関数を $f\big(x|X \geqq 20\big)$ とすると，

$$f\big(x|X \geqq 20\big) = \frac{f(x)}{1 - \Pr(X < 20)} = \frac{f(x)}{0.40} \qquad (x \geqq 20)$$

なので，

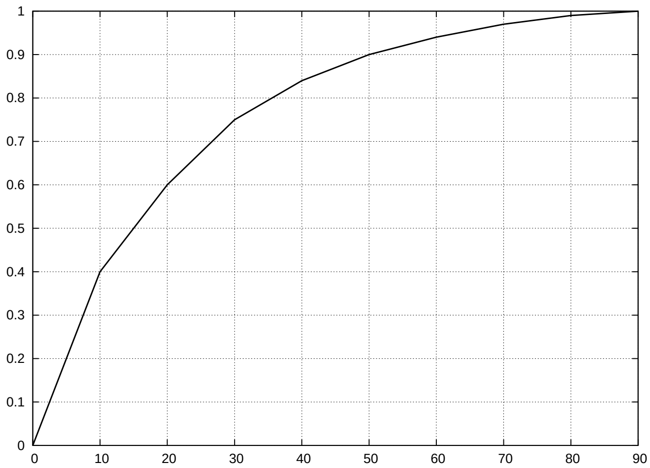
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{0.40}{10} & (0 \leqq x < 10) \\ \dfrac{0.20}{10} & (10 \leqq x < 20) \\ \dfrac{0.15}{10} & (20 \leqq x < 30) \\ \dfrac{0.09}{10} & (30 \leqq x < 40) \\ \dfrac{0.06}{10} & (40 \leqq x < 50) \\ \dfrac{0.04}{10} & (50 \leqq x < 60) \\ \dfrac{0.03}{10} & (60 \leqq x < 70) \\ \dfrac{0.02}{10} & (70 \leqq x < 80) \\ \dfrac{0.01}{10} & (80 \leqq x < 90) \end{cases}, \qquad f\big(x|X \geqq 20\big) = \begin{cases} \dfrac{0.15/0.40}{10} & (20 \leqq x < 30) \\ \dfrac{0.09/0.40}{10} & (30 \leqq x < 40) \\ \dfrac{0.06/0.40}{10} & (40 \leqq x < 50) \\ \dfrac{0.04/0.40}{10} & (50 \leqq x < 60) \\ \dfrac{0.03/0.40}{10} & (60 \leqq x < 70) \\ \dfrac{0.02/0.40}{10} & (70 \leqq x < 80) \\ \dfrac{0.01/0.40}{10} & (80 \leqq x < 90) \end{cases}$$

(1) 平均寿命 $= E(X) = \displaystyle\sum_{i=0}^{8} \int_{10\times i}^{10\times(i+1)} x f(x)\, dx = 0.40 \cdot 5 + 0.20 \cdot 15 + 0.15 \cdot 25 + 0.09 \cdot 35 + 0.06 \cdot 45 + 0.04 \cdot 55 + 0.03 \cdot 65 + 0.02 \cdot 75 + 0.01 \cdot 85 = \boxed{21.10}$

(2) 20 歳以降の平均余命 $= E\big(X|X \geqq 20\big) - 20 = \displaystyle\sum_{i=2}^{8} \int_{10\times i}^{10\times(i+1)} x f\big(x|X \geqq 20\big)\, dx - 20 = \dfrac{0.15 \cdot 25 + 0.09 \cdot 35 + 0.06 \cdot 45 + 0.04 \cdot 55 + 0.03 \cdot 65 + 0.02 \cdot 75 + 0.01 \cdot 85}{0.40} - 20 = 40.25 - 20 = \boxed{20.25}$

(3) X の累積分布関数を $F(x)$ とすると

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{0.40}{10}x & (0 \leqq x < 10) \\ \dfrac{0.20}{10}(x-10)+0.40 & (10 \leqq x < 20) \\ \dfrac{0.15}{10}(x-20)+0.60 & (20 \leqq x < 30) \\ \dfrac{0.09}{10}(x-30)+0.75 & (30 \leqq x < 40) \\ \dfrac{0.06}{10}(x-40)+0.84 & (40 \leqq x < 50) \\ \dfrac{0.04}{10}(x-50)+0.90 & (50 \leqq x < 60) \\ \dfrac{0.03}{10}(x-60)+0.94 & (60 \leqq x < 70) \\ \dfrac{0.02}{10}(x-70)+0.97 & (70 \leqq x < 80) \\ \dfrac{0.01}{10}(x-80)+0.99 & (80 \leqq x < 90) \end{cases}$$



(4) $F(x) = \dfrac{1}{2}$ をみたす x は区間 $[10, 20)$ の間にあるので，方程式

$$\frac{0.20}{10}(x-10)+0.40 = \frac{1}{2}$$

を解けばよい．よって，中央値 $= \boxed{15.00}$

第 7 問解答（統計学）

問題 2 X_1, X_2 をそれぞれ第 1 回目, 第 2 回目の試験結果を表す確率変数とし，$Y = X_1+X_2$ をその合計する．$X_1 \sim \mathrm{N}(35, 6^2)$, $X_2 \sim \mathrm{N}(30, 8^2)$ で，これらは独立なので，$Y \sim \mathrm{N}(65, 10^2)$ である．よって，$Z = \dfrac{Y-65}{10} \sim \mathrm{N}(0,1)$ である．

(1) $\Pr(Y \geqq 80) = \Pr(Z \geqq 1.5) = \boxed{6.68}\,\%$

(2) $\Pr(Y \leqq 45) = \Pr(Z \leqq -2) = \Pr(Z \geqq 2) = \boxed{2.28}\,\%$

(3) $\Pr(Z \geqq 1.04) = \Pr(Y \geqq 75.4) = 14.92\,\%$．ゆえに，A の最低点は $\boxed{76}$ 点

(4) $\Pr(Z \geqq 0.85) = \Pr(Z \leqq -0.85) = \Pr(Y \leqq 56.5) = 19.77\,\%$．ゆえに，D の最高点は $\boxed{56}$ 点

(5) $\Pr(Z \geqq 0.26) = \Pr(Y \geqq 67.6) = 39.74\,\%$．ゆえに，B の下限は $\boxed{68}$ 点

第 7 問解答（統計学）

問題 3

(1) $\Pr(W_1|X=3) = \dfrac{6}{9} = \boxed{\dfrac{2}{3}}$

(2) $\Pr(W_2|X=3) = \dfrac{6}{9} \cdot \dfrac{5}{8} = \boxed{\dfrac{5}{12}}$

(3) $\Pr(W_1) = \boxed{\dfrac{1}{2}}$， $\Pr(W_2) = \boxed{\dfrac{1}{3}}$

（ $\Pr(W_1)$ の導出過程 ）

$$\Pr(W_1|X=k) = 1 - \frac{k}{9} \quad (k = 0, 1, \ldots, 9).$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \Pr(W_1) &= \sum_{k=0}^{9} \Pr(X=k)\Pr(W_1|X=k) \\ &= \frac{1}{10}\sum_{k=0}^{9}\Big(1-\frac{k}{9}\Big) = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

（ $\Pr(W_2)$ の導出過程 ）

$$\Pr(W_2|X=k) = \Big(1-\frac{k}{9}\Big)\Big(1-\frac{k}{8}\Big) \quad (k = 0, 1, \ldots, 9).$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \Pr(W_2) &= \sum_{k=0}^{9} \Pr(X=k)\Pr(W_2|X=k) \\ &= \frac{1}{10}\sum_{k=0}^{9}\Big(1-\frac{k}{9}\Big)\Big(1-\frac{k}{8}\Big) = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

(4) $\Pr(X=k|W_1) = \dfrac{\Pr(X=k)\Pr(W_1|X=k)}{\Pr(W_1)} = \dfrac{\frac{1}{10}\cdot(1-\frac{k}{9})}{\frac{1}{2}} = \boxed{\dfrac{9-k}{45}}$

第 8 問解答（統計学）

問題 1

(1) $\boxed{(\text{ア})\ n}$, $\boxed{(\text{イ})\ p}$, $\boxed{(\text{ウ})\ \text{二項}}$, $\boxed{(\text{エ})\ \dfrac{x}{n}}$, $\boxed{(\text{オ})\ p}$, $\boxed{(\text{カ})\ \dfrac{p(1-p)}{n}}$

$\boxed{(\text{キ})\ \dfrac{x}{n}-p}$, $\boxed{(\text{ク})\ \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}}$, $\boxed{(\text{ケ})\ 1.96}$

$\boxed{(\text{コ})\ \dfrac{x}{n}-1.96\sqrt{\dfrac{x/n(1-x/n)}{n}}}$, $\boxed{(\text{サ})\ \dfrac{x}{n}+1.96\sqrt{\dfrac{x/n(1-x/n)}{n}}}$

(2) $\hat{p}=\dfrac{180}{500}=0.36$．ゆえに

信頼区間の下限 $= 0.36-1.96\sqrt{\dfrac{0.36\cdot 0.64}{500}} = \boxed{0.318}$

信頼区間の上限 $= 0.36+1.96\sqrt{\dfrac{0.36\cdot 0.64}{500}} = \boxed{0.402}$

(3) $\Pr(|z|<1.96)=\Pr\left\{\left(\dfrac{x}{n}-p\right)^2<\dfrac{1.96^2}{n}p(1-p)\right\}$．右辺の中括弧内の不等式を変形すると

$$\boxed{(\text{シ})\ n+1.96^2}\ p^2-\boxed{(\text{ス})\ 2x+1.96^2}\ p+\frac{x^2}{n}<0$$

第 8 問解答（統計学）

問題 2

(1) 個人が「投資経験」i,「景気判断」j をもつ確率を p_{ij} とする．ただし，$i=1$ ならば A, $i=2$ ならば B；$j=1$ ならば「拡大する」，$j=2$ ならば「変わらない」，$j=3$ ならば「後退する」とする．二つの属性が独立ならば，

$$p_{ij} = (p_{i1}+p_{i2}+p_{i3}) \times (p_{1j}+p_{2j}), \qquad i=1,2;\ j=1,2,3$$

なので，p_{ij} は各セルの度数 x_{ij} を使い

$$\hat{p}_{ij} = \frac{x_{i1}+x_{i2}+x_{i3}}{160} \times \frac{x_{1j}+x_{2j}}{160}, \qquad i=1,2;\ j=1,2,3$$

で推定される．したがって．セル (i,j) の期待度数は $160 \cdot \hat{p}_{ij}$ で与えられる．

期待人数

	拡大する	変わらない	後退する
A	(ア) 37.5	(イ) 25.0	(ウ) 37.5
B	(エ) 22.5	(オ) 15.0	(カ) 22.5

(2) (a) 帰無仮説 「投資経験」と「景気判断」という二つの属性は独立

対立仮説 「投資経験」と「景気判断」という二つの属性は従属

(b) 自由度 2 のカイ 2 乗分布

(c) 検定統計量の値 $= \displaystyle\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} \frac{(x_{ij}-160\cdot\hat{p}_{ij})^2}{160\cdot\hat{p}_{ij}} = \boxed{3.56}$

(d)

$$\text{検定統計量の値} > \chi^2_{0.05}(2) = 5.99$$

ならば，帰無仮説は有意水準 5% で棄却される．
実際

$$\text{検定統計量の値} = 3.56 \not> 5.99$$

よって,「投資経験」と「景気判断」という二つの属性は独立という仮説は棄却されない（採択される）．

第 8 問解答（統計学）

$\boxed{\text{問題 3}}$

(1)

- $r_{xy} = \dfrac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}}\sqrt{S_{yy}}} = \boxed{(1)\ 0.80}$
- $\hat{\alpha} = \bar{y} - \dfrac{S_{xy}}{S_{xx}}\bar{x} = \boxed{(2)\ 11.11}$，$\hat{\beta} = \dfrac{S_{xy}}{S_{xx}} = \boxed{(3)\ 0.89}$
- 決定係数 $= \dfrac{S_{\hat{y}\hat{y}}}{S_{yy}} = \dfrac{\boxed{\text{(ア) 回帰平方和}}}{y\ \text{の平方和}}$

  $S_{\hat{y}\hat{y}} = \hat{\beta}^2 S_{xx}$ より，$\dfrac{S_{\hat{y}\hat{y}}}{S_{yy}} = \dfrac{S_{xy}^2}{S_{xx}S_{yy}} = {r_{xy}}^2$.

  よって，決定係数は相関係数の $\boxed{\text{(イ) 平方}}$ で，その値は $\boxed{(4)\ 0.64}$

  $S_{\hat{y}\hat{y}} = {r_{xy}}^2 \times S_{yy} = \boxed{(5)\ 1536.00}$

  $S_{yy} = S_{\hat{y}\hat{y}} + S_{ee}$ なので，$S_{ee} = \boxed{(6)\ 864.00}$
- $s^2 = \dfrac{1}{25-2}S_{ee} = \boxed{(7)\ 37.57}$

  $\hat{\beta}$ の標準偏差は $\dfrac{\sigma}{\sqrt{S_{xx}}}$ なので，その $\boxed{\text{(ウ) 標準誤差}}$ は $\dfrac{s}{\sqrt{S_{xx}}}$ で計算される.

(2)

帰無仮説 $H_0 : \beta = 0$ のもとでは

$$T = \frac{\hat{\beta}}{s/\sqrt{S_{xx}}} \sim t(23)$$

よって，対立仮説 $H_1 : \beta \neq 0$ に対しては,

$$|T| > t_{0.025}(23) = 2.069$$

のとき，H_0 は有意水準 5% で有意となる．実際

$$|T| = \frac{0.89}{\sqrt{37.57/1944}} = 6.402 > 2.069$$

よって，帰無仮説 $H_0 : \beta = 0$ は棄却される.