第 7 問解答（統計学）

$\boxed{\text{問題 1}}$

1. (1) $\boxed{\text{(ア) 200 万円以上〜300 万円未満}}$, $\boxed{\text{(イ) 1400 万円以上〜1600 万円未満}}$

(2) $\boxed{\text{(ウ) 中央値}}$, $\boxed{\text{(エ) 平均値}}$, $\boxed{\text{(オ) 最頻値}}$

(3) $\boxed{\text{(カ) 負}}$

2. (1) $\boxed{\text{(ア) 0.2}}$, $\boxed{\text{(イ) 0.3}}$, $\boxed{\text{(ウ) 0.4}}$, $\boxed{\text{(エ) 0.3}}$, $\boxed{\text{(オ) 0.6}}$, $\boxed{\text{(カ) 4000}}$

(2) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ は正の値をとる大きさ n のデータで，それらを小さい方から大きさの順に並べたものを $x_{(1)} \leqq x_{(2)} \leqq \cdots \leqq x_{(n)}$ とし，この k 番目までの和を $s_k = \sum_{i=1}^{k} x_{(i)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ とする．いま xy 平面において，原点 O を P_0，座標 $\left(\frac{k}{n}, \frac{s_k}{s_n}\right)$ に対応する点を P_k とし，これらの点 $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots, \mathrm{P}_n$ を順に線分で結んだ折れ線 L を考える．この折れ線を “ローレンツ曲線” とよぶ．
この問題の場合，$\frac{s_k}{s_n}$ は累積相対分配金額であるから，ローレンツ曲線は

$$(0, 0), \quad (0.25, 0.1), \quad (0.5, 0.3), \quad (0.75, 0.6), \quad (1, 1)$$

を結ぶ折れ線となる（図は省略）．

(3) 大きさ n のデータ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ のすべての組み合わせ (x_i, x_j) $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ を考え，それらの差の絶対値を平均した $\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i - x_j|$ と 標本平均 $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ の 2 倍との比

$$\frac{1}{2n^2\bar{x}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i - x_j| = \frac{1}{n^2\bar{x}}\sum_{i<j}|x_i - x_j|$$

を” ジニ係数” とよぶ．この問題の場合

$$\text{ジニ係数} = \frac{400 + 800 + 1200 + 400 + 800 + 400}{4^2 \cdot 1000} = \boxed{0.25}$$

第7問解答（統計学）

問題 2

1. (1) $\Pr(T_1=2)=\dfrac{1}{4}$, $\Pr(T_1=1)=\dfrac{1}{2}$, $\Pr\Big(T_1=\dfrac{1}{2}\Big)=\dfrac{1}{4}$ であるから

$$T_1 \text{ の期待値} = E(T_1) = 2\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\boxed{\frac{9}{8}}$$

T_1 の 2 次モーメントは $E(T_1^2)=2^2\cdot\dfrac{1}{4}+1^2\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{25}{16}$．よって

$$T_1 \text{ の分散} = E(T_1^2)-\{E(T_1)\}^2=\frac{25}{16}-\Big(\frac{9}{8}\Big)^2=\boxed{\frac{19}{64}}$$

(2) $\{T_2>T_0\}\Leftrightarrow\Big\{\dfrac{T_2}{T_1}\dfrac{T_1}{T_0}>1\Big\}\Leftrightarrow\Big\{\dfrac{T_2}{T_1}=2,\dfrac{T_1}{T_0}=2\Big\}\bigcup\Big\{\dfrac{T_2}{T_1}=2,\dfrac{T_1}{T_0}=1\Big\}\bigcup$
$\Big\{\dfrac{T_2}{T_1}=1,\dfrac{T_1}{T_0}=2\Big\}$ であるから，$\dfrac{T_2}{T_1}$ と $\dfrac{T_1}{T_0}$ の独立性より

$$\text{確率} = \Pr(T_2>T_0)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\boxed{\frac{5}{16}}$$

(3) T_5 の期待値 $=\boxed{1.80}$

(導出過程)
$T_5=\dfrac{T_5}{T_4}\dfrac{T_4}{T_3}\dfrac{T_3}{T_2}\dfrac{T_2}{T_1}\dfrac{T_1}{T_0}T_0=\dfrac{T_5}{T_4}\dfrac{T_4}{T_3}\dfrac{T_3}{T_2}\dfrac{T_2}{T_1}\dfrac{T_1}{T_0}$ と $\dfrac{T_1}{T_0},\dfrac{T_2}{T_1},\ldots$ の独立性より

$$\begin{aligned}E(T_5)&=E\Big(\frac{T_5}{T_4}\Big)E\Big(\frac{T_4}{T_3}\Big)E\Big(\frac{T_3}{T_2}\Big)E\Big(\frac{T_2}{T_1}\Big)E\Big(\frac{T_1}{T_0}\Big)\\&=\Big\{E\Big(\frac{T_1}{T_0}\Big)\Big\}^5=\{E(T_1)\}^5=\frac{9^5}{8^5}=1.80\end{aligned}$$

2. (1) 畑 i $(i=1,2,\ldots)$ の農産物の品質を表す確率変数を X_i とする．ここで，高級品なら $X_i=1$，そうでないなら $X_i=0$ とする．このとき，$S=X_1+X_2+\cdots+X_{10}$ は二項分布 $\mathrm{Bi}\Big(10,\dfrac{1}{5}\Big)$ にしたがう．よって

$$\Pr(S\leqq 2)=\frac{4^{10}}{5^{10}}+\frac{10\cdot 4^9}{5^{10}}+\frac{45\cdot 4^8}{5^{10}}=0.678$$

ゆえに

$$\text{確率} = \Pr(S\geqq 3)=1-\Pr(S\leqq 2)=\boxed{0.32}$$

(2) この場合は $S=X_1+X_2+\cdots+X_{200}$ は二項分布 $\mathrm{Bi}\Big(200,\dfrac{1}{50}\Big)$ にしたがう．この分布はポアソン分布 $\mathrm{Poi}(4)$ で近似できる．よって

$$\text{確率} = \Pr(S\leqq 2)=\Big(1+4+\frac{4^2}{2!}\Big)e^{-4}=\boxed{0.24}$$

(3) $A,B_1,B_2,\ldots,B_8,C_1,C_2$ を各部品の重量を表す確率変数とすると，製品の重量 $S=A+(B_1+B_2+\cdots+B_8)+(C_1+C_2)$ は正規分布 $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ にしたがう．ここで，$\mu=\mu_A+8\mu_B+2\mu_C=45.9$, $\sigma^2=\sigma_A^2+8\sigma_B^2+2\sigma_C^2=0.0129$．よって

$$\text{確率} = \Pr(S>46.0)=\Pr\Big(\frac{S-\mu}{\sigma}>0.88\Big)=\boxed{0.19}$$

第 7 問解答（統計学）

問題 3

1. (1) Z を標準正規分布 N(0,1) にしたがう確率変数とすると，

$$\Pr(X>0\,|\,U)=\Pr\Bigl(\frac{X-2}{2}>-1\,|\,U\Bigr)=\Pr(Z>-1)=1-\Pr(Z>1)=\boxed{0.84}$$
$$\Pr(X>0\,|\,D)=\Pr\Bigl(\frac{X+1}{3}>\frac{1}{3}\,|\,D\Bigr)=\Pr(Z>0.33)=\boxed{0.37}$$

(2) $\Pr(X<0)=\Pr(U)\Pr(X<0\,|\,U)+\Pr(D)\Pr(X<0\,|\,D)=0.6\cdot(1-0.84)+0.4\cdot(1-0.37)=0.348$．ゆえに

$$\Pr(U\,|\,X<0)=\frac{\Pr(U)\Pr(X<0\,|\,U)}{P(X<0)}=\frac{0.6\cdot(1-0.84)}{0.348}=\boxed{0.28}$$

2. (1) (ア) 大きさ，(イ) 方向

(2) (ウ) -100，(エ) 100，(オ) 0，(カ) 100

(3) (キ) I_B，(ク) I_C，(ケ) 0，(コ) 上から下

3. $\text{価格}=\dfrac{\text{金額}}{\text{数量}}$ であるから，各製品の価格と数量に関して次の表が得られる．

	1995 年		2005 年	
	価格	数量	価格	数量
A	3.75	12	3.00	18
B	6.50	8	6.50	12
C	6.67	18	9.00	14

第 t 時点における製品 A,B,C の販売価格をそれぞれ $p_{t\mathrm{A}},p_{t\mathrm{B}},p_{t\mathrm{C}}$，販売数量をそれぞれ $q_{t\mathrm{A}},q_{t\mathrm{B}},q_{t\mathrm{C}}$ とする．比較時点（$t=1$）における各製品の販売価格の基準時点（$t=0$）に対する上昇倍率は，それぞれ

$$\frac{p_{1\mathrm{A}}}{p_{0\mathrm{A}}},\qquad\frac{p_{1\mathrm{B}}}{p_{0\mathrm{B}}},\qquad\frac{p_{1\mathrm{C}}}{p_{0\mathrm{C}}}$$

基準時点における 3 製品の取引総額 $S=p_{0\mathrm{A}}q_{0\mathrm{A}}+p_{0\mathrm{B}}q_{0\mathrm{B}}+p_{0\mathrm{C}}q_{0\mathrm{C}}$ に対する第各製品の取引額の比率はそれぞれ

$$w_\mathrm{A}=\frac{p_{0\mathrm{A}}q_{0\mathrm{A}}}{S},\quad w_\mathrm{B}=\frac{p_{0\mathrm{B}}q_{0\mathrm{B}}}{S},\quad w_\mathrm{C}=\frac{p_{0\mathrm{C}}q_{0\mathrm{C}}}{S}$$

これらを重みとして販売価格の上昇倍率の加重平均をとると価格のラスパイレス指数 P_L が得られる．すなわち，

$$\begin{aligned}P_\mathrm{L}&=w_\mathrm{A}\frac{p_{1\mathrm{A}}}{p_{0\mathrm{A}}}+w_\mathrm{B}\frac{p_{1\mathrm{B}}}{p_{0\mathrm{B}}}+w_\mathrm{C}\frac{p_{1\mathrm{C}}}{p_{0\mathrm{C}}}=\frac{p_{1\mathrm{A}}q_{0\mathrm{A}}+p_{1\mathrm{B}}q_{0\mathrm{B}}+p_{1\mathrm{C}}q_{0\mathrm{C}}}{p_{0\mathrm{A}}q_{0\mathrm{A}}+p_{0\mathrm{B}}q_{0\mathrm{B}}+p_{0\mathrm{C}}q_{0\mathrm{C}}}\\&=\frac{3.00\cdot12+6.50\cdot8+9.00\cdot18}{3.75\cdot12+6.50\cdot8+6.67\cdot18}=1.152\end{aligned}$$

基準時点の指数を 100 とすると

$$P_\mathrm{L}=\boxed{115.2}$$

比較時点における 3 製品の実質取引総額 $S' = p_{0\mathrm{A}}q_{1\mathrm{A}} + p_{0\mathrm{B}}q_{1\mathrm{B}} + p_{0\mathrm{C}}q_{1\mathrm{C}}$ に対する第各製品の実質取引額の比率はそれぞれ

$$w'_{\mathrm{A}} = \frac{p_{0\mathrm{A}}q_{1\mathrm{A}}}{S'}, \quad w'_{\mathrm{B}} = \frac{p_{0\mathrm{B}}q_{1\mathrm{B}}}{S'}, \quad w'_{\mathrm{C}} = \frac{p_{0\mathrm{C}}q_{1\mathrm{C}}}{S'}$$

これらを重みとして販売価格の上昇倍率の加重平均をとると価格のパーシェ指数 P_{P} が得られる．すなわち，

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{P}} &= w'_{\mathrm{A}}\frac{p_{1\mathrm{A}}}{p_{0\mathrm{A}}} + w'_{\mathrm{B}}\frac{p_{1\mathrm{B}}}{p_{0\mathrm{B}}} + w'_{\mathrm{C}}\frac{p_{1\mathrm{C}}}{p_{0\mathrm{C}}} = \frac{p_{1\mathrm{A}}q_{1\mathrm{A}} + p_{1\mathrm{B}}q_{1\mathrm{B}} + p_{1\mathrm{C}}q_{1\mathrm{C}}}{p_{0\mathrm{A}}q_{1\mathrm{A}} + p_{0\mathrm{B}}q_{1\mathrm{B}} + p_{0\mathrm{C}}q_{1\mathrm{C}}} \\ &= \frac{3.00 \cdot 18 + 6.50 \cdot 12 + 9.00 \cdot 14}{3.75 \cdot 18 + 6.50 \cdot 12 + 6.67 \cdot 14} = 1.080 \end{aligned}$$

基準時点の指数を 100 とすると

$$P_{\mathrm{P}} = \boxed{108.0}$$

フィッシャー価格指数 P_{F} はラスパイレス価格指数 P_{L} とパーシェ価格指数 P_{P} の幾何平均で定義される．すなわち，

$$P_{\mathrm{F}} = \sqrt{P_{\mathrm{L}} \cdot P_{\mathrm{P}}} = \boxed{111.5}$$

加重平均の対象を，価格ではなく数量の上昇倍率

$$\frac{q_{1\mathrm{A}}}{q_{0\mathrm{A}}}, \qquad \frac{q_{1\mathrm{B}}}{q_{0\mathrm{B}}}, \qquad \frac{q_{1\mathrm{C}}}{q_{0\mathrm{C}}}$$

にしたものが数量指数である．重み $w_{\mathrm{A}}, w_{\mathrm{B}}, w_{\mathrm{C}}$ を用いると，数量のラスパイレス指数 Q_{L} が得られる．すなわち，

$$\begin{aligned} Q_{\mathrm{L}} &= w_{\mathrm{A}}\frac{q_{1\mathrm{A}}}{q_{0\mathrm{A}}} + w_{\mathrm{B}}\frac{q_{1\mathrm{B}}}{q_{0\mathrm{B}}} + w_{\mathrm{C}}\frac{q_{1\mathrm{C}}}{q_{0\mathrm{C}}} = \frac{p_{0\mathrm{A}}q_{1\mathrm{A}} + p_{0\mathrm{B}}q_{1\mathrm{B}} + p_{0\mathrm{C}}q_{1\mathrm{C}}}{p_{0\mathrm{A}}q_{0\mathrm{A}} + p_{0\mathrm{B}}q_{0\mathrm{B}} + p_{0\mathrm{C}}q_{0\mathrm{C}}} \\ &= \frac{3.75 \cdot 18 + 6.50 \cdot 12 + 6.67 \cdot 14}{3.75 \cdot 12 + 6.50 \cdot 8 + 6.67 \cdot 18} = 1.101 \end{aligned}$$

基準時点の指数を 100 とすると

$$Q_{\mathrm{L}} = \boxed{110.1}$$

比較時点における 3 製品の取引総額を基準時点の数量を用いて $S'' = p_{1\mathrm{A}}q_{0\mathrm{A}} + p_{1\mathrm{B}}q_{0\mathrm{B}} + p_{1\mathrm{C}}q_{0\mathrm{C}}$ で算出し，重み

$$w''_{\mathrm{A}} = \frac{p_{1\mathrm{A}}q_{0\mathrm{A}}}{S''}, \quad w_{\mathrm{B}} = \frac{p_{1\mathrm{B}}q_{0\mathrm{B}}}{S''}, \quad w_{\mathrm{C}} = \frac{p_{1\mathrm{C}}q_{0\mathrm{C}}}{S''}$$

で数量の上昇倍率の加重平均をとると，数量のパーシェ指数 Q_{P} が得られる．すなわち，

$$\begin{aligned} Q_{\mathrm{P}} &= w''_{\mathrm{A}}\frac{q_{1\mathrm{A}}}{q_{0\mathrm{A}}} + w''_{\mathrm{B}}\frac{q_{1\mathrm{B}}}{q_{0\mathrm{B}}} + w''_{\mathrm{C}}\frac{q_{1\mathrm{C}}}{q_{0\mathrm{C}}} = \frac{p_{1\mathrm{A}}q_{1\mathrm{A}} + p_{1\mathrm{B}}q_{1\mathrm{B}} + p_{1\mathrm{C}}q_{1\mathrm{C}}}{p_{1\mathrm{A}}q_{0\mathrm{A}} + p_{1\mathrm{B}}q_{0\mathrm{B}} + p_{1\mathrm{C}}q_{0\mathrm{C}}} \\ &= \frac{3.00 \cdot 18 + 6.50 \cdot 12 + 9.00 \cdot 14}{3.00 \cdot 12 + 6.50 \cdot 8 + 9.00 \cdot 18} = 1.032 \end{aligned}$$

基準時点の指数を 100 とすると

$$Q_{\mathrm{P}} = \boxed{103.1}$$

フィッシャー数量指数 Q_{F} はラスパイレス数量指数 Q_{L} とパーシェ数量指数 Q_{P} の幾何平均で定義される．すなわち，

$$Q_{\mathrm{F}} = \sqrt{Q_{\mathrm{L}} \cdot Q_{\mathrm{P}}} = \boxed{106.6}$$

第8問解答（統計学）

$\boxed{\text{問題 1}}$

1. (1) R_P を $F,\, u_A,\, u_B,\, u_C$ を使って表すと

$$R_P = \frac{5}{2} + F + \frac{1}{2}u_A + \frac{1}{4}u_B + \frac{1}{4}u_C$$

ゆえに,

$$R_P \text{ の期待値} = E(R_P) = \frac{5}{2} + E(F) + \frac{1}{2}E(u_A) + \frac{1}{4}E(u_B) + \frac{1}{4}E(u_C) = \boxed{\frac{5}{2}}$$

$F,\, u_A,\, u_B,\, u_C$ は独立であるから,

$$R_P \text{ の分散} = V(R_P) = V(F) + \frac{1}{4}V(u_A) + \frac{1}{16}V(u_B) + \frac{1}{16}V(u_C) = \boxed{\frac{25}{16}}$$

(2) R_P は正規分布 $\mathrm{N}\Big(\dfrac{5}{2}, \dfrac{25}{16}\Big)$ にしたがうので,

$$\Pr(R_P \leqq r) = \Pr\Big(Z \leqq \frac{r - 5/2}{5/4}\Big) = 0.05$$

より，$\dfrac{r-5/2}{5/4} = -1.64$．よって

$$r = \frac{5}{2} - 1.64 \cdot \frac{5}{4} = \boxed{0.45}$$

2. 期待値の $x = \boxed{7}$ ，メディアンの $x = \boxed{5}$

(導出過程)

$\log S_t - \log S_{t-1} = 0.5 + u_t,\ \log S_0 = 0$ であるから,

$$\log S_{10} = 5 + (u_1 + u_2 + \cdots + u_{10})$$

よって，$X = \log S_{10}$ は正規分布 $\mathrm{N}(5, 4)$ にしたがう．S_{10} の期待値は

$$\begin{aligned} E(S_{10}) = E(e^X) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^x \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \exp\Big\{-\frac{(x-5)^2}{2\cdot 2^2}\Big\}\, dx \\ &= e^7 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \exp\Big\{-\frac{(x-9)^2}{2\cdot 2^2}\Big\}\, dx = e^7 \end{aligned}$$

S_{10} の分布関数は

$$\Pr(S_{10} \leqq s) = \Pr(X \leqq \log s) = \int_{-\infty}^{\log s} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \exp\Big\{-\frac{(x-5)^2}{2\cdot 2^2}\Big\}\, dx$$

$\Pr(S_{10} \leqq s) = \dfrac{1}{2}$ となるのは，$\log s = 5$ すなわち $s = e^5$ のとき．よって

$$\mathrm{med}(S_{10}) = e^5$$

第 8 問解答（統計学）

問題 2

1. (ア) 全変動 , (イ) グループ間変動 , (ウ) グループ内変動

(エ) 全変動 , (オ) グループ間変動 , (カ) グループ内変動

2.

変動要因	自由度	平方和	不偏分散	F 統計量
グループ間	(ア) 3	0.69	(エ) 0.23	(カ) 12.1
グループ内	(イ) 16	(ウ) 0.30	(オ) 0.019	
合計	19	0.99		

(キ) 帰無 , (ク) 対立 , (ケ) 3 , (コ) 16

(サ) 大きい , (シ) 帰無 , (ス) 棄却

第 8 問解答（統計学）

問題 3

1. $\boxed{\text{(ア) 分散}}$, $\boxed{\text{(イ) 系列相関}}$, $\boxed{\text{(ウ) 説明変数}}$

$\boxed{\text{(エ) 無相関}}$, $\boxed{\text{(オ) 正規}}$, $\boxed{\text{(カ) 最小分散線形不偏}}$

$\boxed{\text{(キ) 最小分散不偏}}$, $\boxed{\text{(ク) (3)}}$, $\boxed{\text{(ケ) 多重共線性}}$

2. (1) $\hat{\alpha}_0 = \bar{y} = \boxed{12.53}$

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{S_{yt}}{S_{tt}} = \frac{-351.95}{143.0} = \boxed{-2.46}$$

$$R^2 = \frac{S_{yt}^2}{S_{yy}S_{tt}} = \frac{351.95^2}{1013.8 \cdot 143.0} = \boxed{0.854}$$

$$\hat{y}_{13} = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1(13 - \bar{t}) = 12.53 - 2.46 \cdot (13 - 6.50) = \boxed{-3.5}$$

(2) $\hat{\beta}_1 = \dfrac{S_{ut}}{S_{tt}} = \dfrac{-30.971}{143.0} = \boxed{-0.22}$

$$R^2 = \frac{S_{ut}^2}{S_{uu}S_{tt}} = \frac{30.971^2}{6.855 \cdot 143.0} = \boxed{0.979}$$

(3) 信頼区間の下限 $= \boxed{-0.24}$ ，上限 $= \boxed{-0.20}$

(導出過程)

$V_e^2 = \dfrac{1}{12-2}\left(S_{uu} - \dfrac{S_{ut}^2}{S_{tt}}\right)$ とすると，$\dfrac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{V_e/\sqrt{S_{tt}}}$ は自由度 10 の t 分布にしたがうので，β_1 の 95% 信頼区間は

$$\hat{\beta}_1 - 2.228\frac{V_e}{\sqrt{S_{tt}}} \leqq \beta_1 \leqq \hat{\beta}_1 + 2.228\frac{V_e}{\sqrt{S_{tt}}}$$

で与えられる．$V_e = \sqrt{\dfrac{1}{10}\left(6.855 - \dfrac{30.971^2}{143.0}\right)} = 0.121$, $\sqrt{S_{tt}} = 11.958$ であるから

$$\text{下限} = \hat{\beta}_1 - 2.228\frac{V_e}{\sqrt{S_{tt}}} = -0.22 - 0.023 = -0.24$$

$$\text{上限} = \hat{\beta}_1 + 2.228\frac{V_e}{\sqrt{S_{tt}}} = -0.22 + 0.023 = -0.20$$